

COLLECTANEA MATHEMATICA

PUBBLICAZIONI DELL'ISTITUTO DI MATEMATICA

DELL'UNIVERSITÀ DI MILANO

N. 400

CARLO FELICE MANARA

Sull'uso delle distribuzioni triangolari
nei modelli di pianificazione probabilistica

Estratto da *"Rivista di Statistica applicata"*,
4 (1971), pp. 151-179

MILANO

1971

CARLO FELICE MANARA

**Sull'uso delle distribuzioni triangolari
nei modelli di pianificazione probabilistica**

Estratto da:

RIVISTA DI STATISTICA APPLICATA n. 4 - vol. 4 - dicembre 1971

E. S. T. E. EDIZIONI SCIENTIFICHE TECNICHE EUROPEE S. p. A. MILANO

Sull'uso delle distribuzioni triangolari nei modelli di pianificazione probabilistica

CARLO FELICE MANARA

Facoltà di Scienze - Università di Milano

Il metodo della pianificazione va diventando sempre più importante per la razionalizzazione dei processi decisori, nelle imprese come negli enti pubblici. Ci si avvede ora * che una esplicita considerazione e valutazione non solo dei « valori attesi », ma della loro possibile distribuzione, costituisce un salto qualitativo quasi inevitabile, anche se difficile. Esso pone però problemi metodologici nuovi e abbastanza complessi. L'A. offre in questo saggio un contributo rilevante: mostra infatti come l'uso delle distribuzioni triangolari, che già si sapevano essere uno strumento assai più flessibile e realistico delle distribuzioni normali e beta di solito proposte, renda possibile calcolare analiticamente (e cioè senza bisogno di ricorrere a costose — e più incerte — simulazioni) le caratteristiche delle distribuzioni output derivanti dalle distribuzioni dei fattori input del processo.

L'articolo di C. F. Manara è seguito da un'appendice applicativa di A. Liverani.

1. - Nella presente nota intendiamo occuparci di certe funzioni di distribuzione di probabilità che dipendono da tre parametri e che, per la forma della loro rappresentazione grafica, vengono abitualmente chiamate « distribuzioni triangolari ». Il lavoro trae la sua origine da certi problemi di gestione aziendale e di ricerca operativa che si debbono risolvere quando sia necessario costruire dei modelli matematici partendo da informazioni le quali posseggono certi caratteri di incertezza, che è conveniente tradurre in termini di funzioni di distribuzione di probabilità di certe variabili casuali.

Il caso tipico di questi problemi si ha per esempio quando in pratica si domandi il parere di un esperto sul valore di certe grandezze sulle quali non si hanno informazioni sufficienti per poter at-

* Si veda ad es.: P. GENNARO e A. RUGIADINI, La pianificazione con modelli probabilistici, *Sviluppo e Organizzazione*, n. 10, 1971.

tribuire loro dei valori certi. Per esempio, si pensi di aver richiesto ad un esperto le sue previsioni sul prezzo futuro di una certa merce, e si supponga di aver ottenuto come risposta una valutazione pessimistica, una valutazione ottimistica ed una indicazione del valore più probabile: la risposta potrebbe essere per es. del tipo seguente: « Il prezzo non potrà essere l'anno prossimo superiore a *tot*, non potrà essere inferiore a *tot* e probabilmente sarà *tot* ».

Per utilizzare indicazioni di questo tipo nelle elaborazioni successive di carattere quantitativo spesso appare molto utile poter tradurre le informazioni ricevute in termini di distribuzioni di probabilità, per esempio nel modo seguente: si considerano i valori della grandezza in parola come i valori di una variabile casuale e si traducono le informazioni e le indicazioni dell'esperto con una funzione di distribuzione di probabilità della variabile stessa. Nasce quindi il problema di scegliere una funzione che traduca in questo modo le informazioni ottenute e che dipenda dai tre parametri presi in considerazione e precisamente gli estremi dell'intervallo di variazione e la moda indicata dall'esperto, cioè il valore della variabile che egli considera come il più probabile.

E' del tutto ovvio che un problema cosiffatto non è determinato e quindi può essere avviato a soluzione soltanto quando si accettino delle ipotesi aggiuntive e si pongano delle condizioni ulteriori, che riguardino per esempio i requisiti che la funzione dovrebbe avere, in vista di determinati fini.

Per quanto riguarda le ipotesi, vorremmo accettare la seguente: la risposta dell'esperto, il quale annuncia come « impossibile » il fatto che la variabile considerata prenda certi valori inferiori ad un certo limite oppure superiori ad un certo altro, viene tradotta assegnando probabilità uguale a zero per i valori della variabile esterni all'intervallo indicato. Vale tuttavia la pena di osservare in modo esplicito che l'accettare questa ipotesi non significa — almeno a nostro parere — accettare che sussista la *impossibilità fisica assoluta* che le cose si svolgano in modo diverso da quello indicato.

A nostro parere il giudizio di « impossibilità » dato dall'esperto è da considerarsi come relativo, e precisamente sottoposto ad una clausola limitativa che potrebbe essere presentata per esempio nella forma seguente: « E' impossibile (che la variabile considerata assuma valori esterni all'intervallo indicato) senza che si verifichino degli avvenimenti così straordinari da far « saltare » tutta la struttura razionale

(sia pure a razionalità limitata e circoscritta) che abbiamo accettato più o meno esplicitamente».

Pensiamo che, secondo questa interpretazione, sia lecito assumere delle funzioni di distribuzione che assegnino probabilità zero ai valori della variabile casuale considerata quando siano fuori dell'intervallo indicato; infatti se l'evento considerato «impossibile» si verificasse, questo stesso fatto porterebbe ad inficiare la validità globale del modello razionale che stiamo costruendo.

Fatte queste premesse, è pure chiaro che la forma analitica delle funzioni di probabilità che si vuole costruire è ancora altamente arbitraria; infatti noi dobbiamo soltanto scegliere una funzione $f(x)$ che soddisfi alle condizioni seguenti:

sono dati tre numeri reali, che nel seguito indicheremo sempre con a , b , m , soddisfacenti alle limitazioni

$$(1) \quad 0 \leq a < m < b;$$

per comodità indicheremo con il simbolo \mathcal{E} l'intervallo avente come estremi a e b ; pertanto l'insieme \mathcal{E} sarà definito dalla condizione seguente

$$(2) \quad \mathcal{E} = \{x \mid a \leq x \leq b\}.$$

Si deve avere

$$i) \quad x \notin \mathcal{E} \rightarrow f(x) = 0.$$

$$ii) \quad x \in \mathcal{E} \rightarrow f(x) \geq 0.$$

$$iii) \quad \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx = 1.$$

$$iv) \quad x \neq m \rightarrow f(x) < f(m).$$

Ad una funzione $f(x)$, che sia tale da soddisfare alle condizioni che abbiamo esplicitate ora, possono essere imposte ulteriori condizioni, che ne precisano altri requisiti. Questi potrebbero essere per esempio la «semplicità», per quanto questo requisito sia ben poco precisabile in modo rigoroso, oppure la «economia» di posizioni di memoria e di istruzioni, quando si debba passare alla valutazione numerica della funzione stessa.

E' stata proposta da alcuni la funzione *beta*, definita dalle seguenti condizioni

$$(3) \quad \begin{cases} x \in \mathcal{E} \rightarrow f(x) = e(x-a)^\alpha (b-x)^\gamma \\ x \notin \mathcal{E} \rightarrow f(x) = 0, \end{cases}$$

essendo α e γ due numeri soddisfacenti alle condizioni

$$(4) \quad \alpha > -1, \quad \gamma > -1$$

e determinati in modo che sia soddisfatta la iv), ed essendo e una costante opportunamente calcolata in modo che sia soddisfatta la iii) *.

Si può osservare che tuttavia la scelta della funzione *beta* per risolvere il problema pratico che ci siamo proposti non è scevra da qualche inconveniente.

Infatti si osserva anzitutto che la funzione *beta*, data dalle (3) con le condizioni accessorie enunciate, possiede ancora un grado di libertà, il quale viene utilizzato per imporre alla funzione stessa una ulteriore condizione, che può essere esplicitata per esempio imponendo che lo scarto quadratico della distribuzione abbia determinate caratteristiche e soddisfi a determinate condizioni.

In secondo luogo poi si può osservare che la grafica della funzione *beta* si può presentare in modo da «raccordarsi» con l'asse delle ascisse negli estremi dell'intervallo \mathcal{E} , avendo in tali estremi l'asse stesso come tangente, ma può anche presentarsi con atteggiamento diverso, come può avvenire per esempio nel caso in cui i dati portino ad assegnare agli esponenti α e β i valori

$$\alpha = \beta = 1/2.$$

Ora nel primo caso il comportamento della funzione *beta* può anche essere considerato come abbastanza vicino a quello che la intuizione suggerisce, perchè porta ad una distribuzione di probabilità che attribuisce scarsa importanza alle «code» della distribuzione, mentre nel secondo caso le «code» stesse vengono ad acquistare una importanza eccessiva rispetto a quella che potrebbe essere desiderabile.

Queste osservazioni, ed altre che si potrebbero fare a proposito della scelta della funzione *beta*, hanno portato alla scelta di altre funzioni di distribuzione per la risoluzione dei problemi che abbiamo

* Per la risoluzione dei problemi concreti del calcolo delle costanti α , γ , e in funzione di a , b , m si veda per es.: Gaetano M. Golinelli, Il PERT. Una nuova tecnica di pianificazione e controllo dei programmi di lavoro, Milano, 1964.

enunciato. In particolare la proposta delle funzioni triangolari è stata fatta da varie parti*.

Vale la pena di ripetere che la scelta di queste funzioni è, dal punto di vista dello stretto rigore logico, largamente arbitraria e dettata soltanto da ragioni di comodità e dal desiderio di evitare le eventuali obiezioni e gli inconvenienti a cui darebbe luogo la scelta della funzione *beta*. Pertanto lo studio che diamo qui di queste distribuzioni e dei problemi pratici ad esse connessi è sostanzialmente da intendersi come una proposta ed un contributo alla utilizzazione di uno schema teorico il quale può presentare certi vantaggi rispetto ad altri.

Nei prossimi §§ richiameremo brevemente le funzioni di distribuzione che abbiamo chiamato « triangolari », studiandone le caratteristiche che riteniamo più interessanti. Precisamente il § 2 è dedicato alla espressione analitica delle funzioni di distribuzione ricordate ed il § 3 al richiamo dei loro momenti più importanti. I §§ 4 e 5 sono dedicati alla risoluzione numerica di due fra i problemi che si presentano più frequentemente nelle applicazioni di questi schemi teorici alla pratica, soprattutto nello spirito che abbiamo voluto dare alla trattazione presente.

I §§ 6 e 7 sono dedicati allo studio delle prime proprietà di una funzione di n variabili casuali indipendenti, ognuna delle quali abbia una funzione di distribuzione di tipo « triangolare »; in particolare, sotto opportune ipotesi, viene determinato l'intervallo dei valori della funzione in corrispondenza ai quali la funzione di distribuzione della probabilità prende valori diversi da zero.

Infine nel § 8 si accenna a qualche problema concreto che potrebbe essere utilmente trattato con l'applicazione dei concetti esposti.

2. - Sia dunque x una variabile casuale che supporremo soddisfacente alla condizione

$$(1) \quad 0 \leq x.$$

Indichiamo con a , m , b tre numeri che supporremo soddisfacenti alle relazioni (1) del § 1, che qui riscriviamo per comodità del lettore

$$(1.1) \quad 0 \leq a < m < b.$$

* Cfr. per es., M. Mizuki, Alternative approaches for fitting a P.D.F. in PERT, Atti del 1° Congresso A.I.C.A., Bologna, 1963.

Indichiamo poi con \mathcal{E} l'insieme dei valori di x costituenti l'intervallo avente come estremi a e b ; poniamo cioè

$$(1.2) \quad \mathcal{E} = \{x \mid a \leq x \leq b\}.$$

Per il seguito potrà essere comodo considerare l'insieme \mathcal{E} come unione di due insiemi, che indicheremo con i simboli \mathcal{U} e \mathcal{V} ; precisamente indicheremo con \mathcal{U} l'insieme dei valori di x costituenti l'intervallo avente come estremi a ed m ed indicheremo con \mathcal{V} l'insieme dei valori di x costituenti l'intervallo avente come estremi m e b ; porremo quindi:

$$(3) \quad \left\{ \begin{array}{l} \mathcal{U} = \{x \mid a \leq x \leq m\}. \\ \mathcal{V} = \{x \mid m \leq x \leq b\}. \end{array} \right.$$

$$(4) \quad \left\{ \begin{array}{l} \mathcal{U} = \{x \mid a \leq x \leq m\}. \\ \mathcal{V} = \{x \mid m \leq x \leq b\}. \end{array} \right.$$

E' chiaro che si avrà

$$(5) \quad \mathcal{E} = \mathcal{U} \cup \mathcal{V}.$$

Poniamo ora

$$(6) \quad \varphi(x) = (x - a + |x - a|)/(b - a)(m - a).$$

La grafica della funzione $\varphi(x)$, che prenderemo in considerazione per i valori di x soddisfacenti alla relazione (1), è costituita da due tratti (Fig. 1); e precisamente, per i valori di x soddisfacenti alla relazione

$$(7) \quad 0 \leq x \leq a.$$

tale grafica coincide con l'asse dell'ascisse; per i valori di x soddisfacenti alla relazione

$$(8) \quad a \leq x$$

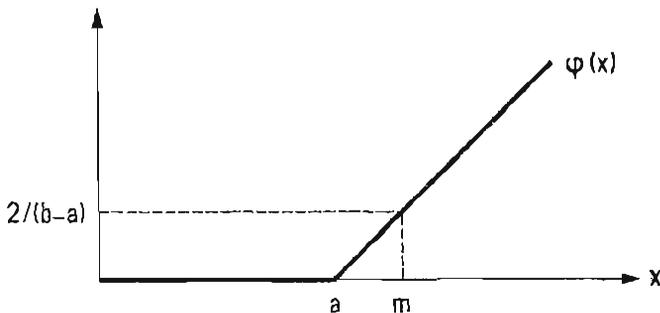


Fig. 1.

la grafica coincide con una retta, passante per i punti aventi le seguenti coppie di coordinate

$$(9) \quad (a, 0); \quad (m, 2/(b-a)).$$

In modo analogo poniamo

$$(10) \quad \psi(x) = (b-x + |b-x|)/(b-a)(b-m).$$

La grafica di questa funzione è costituita da due tratti (Fig. 2); e precisamente, per i valori di x soddisfacenti alla relazione

$$(11) \quad x \leq b$$

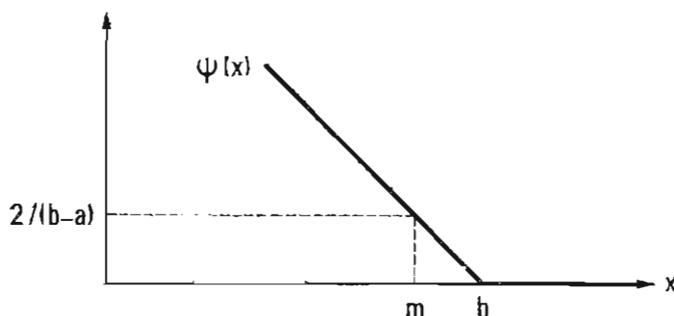


Fig. 2.

essa coincide con la retta passante per i punti aventi le seguenti coppie di coordinate:

$$(12) \quad (m, 2/(b-a)); \quad (b, 0);$$

per i valori di x soddisfacenti alla relazione

$$(13) \quad x \geq b$$

tale grafica coincide con l'asse delle x .

Dalle analisi che abbiamo eseguite segue immediatamente che la funzione $f(x)$ definita dalla formula

$$(14) \quad f(x) = \text{Min} (\varphi(x), \psi(x))$$

è rappresentata graficamente (Fig. 3) da un triangolo avente come base l'intervallo \mathcal{E} ed avente il vertice opposto a tale base nel punto

di ascissa m e di ordinata $2/(b-a)$; al di fuori dell'intervallo \mathcal{E} la grafica della funzione $f(x)$ coincide con l'asse delle ascisse. Si verifica immediatamente che, come conseguenza del carattere geometrico della grafica, è soddisfatta la condizione

$$(15) \quad \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx = 1$$

e pertanto la funzione (14) può essere considerata come una funzione di distribuzione della variabile casuale x .

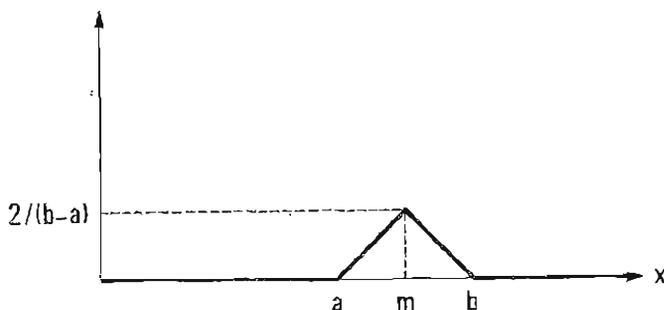


Fig. 3.

La funzione $f(x)$ definita dalla (14) può essere rappresentata analiticamente in vari modi; ci limitiamo qui a presentarne due, per comodità di scelta nell'interesse di coloro che dovessero fare delle concrete verifiche numeriche e dei calcoli sui calcolatori elettronici.

Un primo modo per rappresentare analiticamente la funzione $f(x)$ è dato dalla formula

$$(16) \quad f(x) = \frac{1}{2} \{ \varphi(x) + \psi(x) - |\varphi(x) - \psi(x)| \}.$$

Un secondo modo per rappresentare analiticamente la funzione $f(x)$ è suggerito dalla formula seguente:

$$(17) \quad f(x) = \frac{1}{2} \varphi(x) [1 + \operatorname{sgn}(m - x)] + \\ + \frac{1}{2} \psi(x) [1 + \operatorname{sgn}(x - m)]$$

3. - Prima di passare ad impostare e risolvere — almeno parzialmente — alcuni problemi che riguardano la funzione di distribuzione definita dalla (2.14) è opportuno calcolare direttamente i caratteri principali della funzione stessa.

Poichè i calcoli sono del tutto elementari, daremo nella maggior parte dei casi soltanto i loro risultati, che si possono controllare molto facilmente sulle espressioni che nel § 2 sono state date della funzione $f(x)$.

Per quanto riguarda la media μ della distribuzione, definita, come è noto dalla

$$(1) \quad \mu = \int_{-\infty}^{+\infty} x f(x) dx$$

si ha immediatamente il valore, facilmente prevedibile,

$$(2) \quad \mu = (a + b + m)/3$$

che coincide con l'ascissa del baricentro del triangolo che dà la grafica della funzione $f(x)$.

Per il calcolo della mediana M della distribuzione conviene calcolare la funzione cumulativa $F(x)$ di ripartizione, definita, come è noto, dalla formula

$$(3) \quad F(x) = \int_{-\infty}^x f(t) dt.$$

La grafica della funzione $F(x)$ si può considerare costituita (Fig. 4) dai quattro tratti seguenti:

(4) per $x \leq a$ si ha l'asse delle ascisse;

(5) per $a \leq x \leq m$ si ha $F(x) = (x - a)^2 / (b - a)(m - a)$;

(6) per $m \leq x \leq b$ si ha $F(x) = 1 - (b - x)^2 / (b - a)(b - m)$;

(7) per $x \geq b$ si ha la semiretta parallela all'asse delle ascisse, costituita dai punti aventi ordinata uguale ad 1. Le grafiche delle due parabole rappresentate dalle espressioni (5) e (6) si «raccordano» nel punto avente come ascissa m ed hanno ivi in comune la tangente.

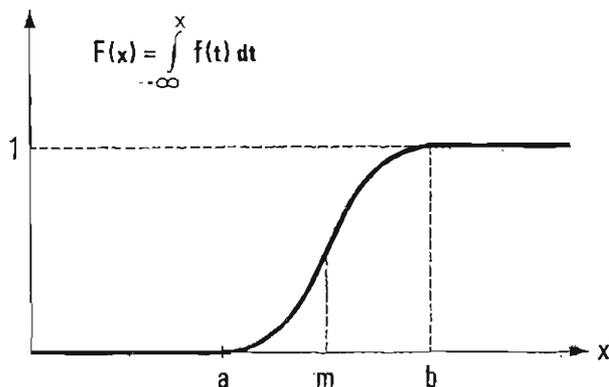


Fig. 4.

La espressione analitica della $F(x)$ in una unica formula potrebbe essere data per esempio nel modo seguente:

$$\begin{aligned}
 F(x) = & \frac{1}{2} \{ 1 + \operatorname{sgn} [(x - a)(m - x)] \} (x - a)^2 / (b - a)(m - a) + \\
 & + \frac{1}{2} \{ 1 + \operatorname{sgn} [(x - m)(b - x)] \} \{ 1 - (b - x)^2 / (b - x)(b - m) \} + \\
 & + \frac{1}{2} \{ \operatorname{sgn}(x - b) + 1 \} .
 \end{aligned}$$

Si trae di qui facilmente il valore della mediana M , cioè il valore della variabile x in corrispondenza al quale si ha

$$(8) \quad F(M) = 1/2 .$$

Ovviamente per la determinazione del valore di M si possono presentare due casi:

1) La moda m è maggiore del valore medio dell'intervallo \mathcal{C} ; si ha cioè

$$(9) \quad m > (a + b)/2 .$$

In questo caso la mediana appartiene all'intervallo che abbiamo convenuto di indicare con \mathcal{U} ed il suo valore in forza della (5) si ottiene risolvendo la equazione

$$(10) \quad (x - a)^2 / (b - a)(m - a) = 1/2 .$$

Si ottiene quindi in questo caso:

$$(11) \quad M_1 = a + \sqrt{(b-a)(m-a)/2}.$$

II) La moda m è minore del valore medio dell'intervallo \mathcal{E} ; si ha cioè

$$(12) \quad m < (a+b)/2.$$

In questo caso la mediana appartiene all'intervallo che abbiamo convenuto di indicare con \mathcal{D} ed il suo valore, in forza della (6), si ottiene risolvendo la equazione

$$(13) \quad 1 - (b-x)^2/(b-a)(b-m) = 1/2.$$

Si ottiene quindi in questo caso:

$$(14) \quad M_2 = b - \sqrt{(b-a)(b-m)/2}.$$

Si verifica che, se la moda m coincidesse con il punto medio dell'intervallo \mathcal{E} , cioè se si avesse

$$(15) \quad 2m = a + b$$

allora le due formule (11) e (14) darebbero per M_1 ed M_2 lo stesso valore, e precisamente darebbero

$$(16) \quad M_1 = M_2 = (a+b)/2.$$

Tenute presenti le (11) e (14) il valore della mediana M potrebbe essere dato con una unica espressione per es. mediante la formula seguente:

$$(17) \quad M = \frac{1}{2} (M_1 + M_2) + \frac{1}{2} (M_1 - M_2) \operatorname{sgn} (2m - a - b).$$

Per quanto riguarda il calcolo di σ^2 si ha, tenendo conto anche della (2), la seguente espressione:

$$(18) \quad \begin{aligned} \sigma^2 &= \frac{1}{18} \{a^2 + b^2 + m^2 - am - bm - ab\} = \\ &= \frac{1}{36} \{(a-b)^2 + (a-m)^2 + (b-m)^2\}. \end{aligned}$$

Ovviamente, nel caso particolare nel quale la distribuzione sia simmetrica, cioè valga la (15), si ha

$$(19) \quad \sigma^2 = (b-a)^2/24.$$

Per quanto riguarda il momento centrale del terzo ordine μ_3 , definito dalla formula

$$(19) \quad \mu_3 = \int_{-\infty}^{+\infty} (x - \mu)^3 f(x) dx$$

si ha, come è noto:

$$(20) \quad \mu_3 = \int_{-\infty}^{+\infty} x^3 f(x) dx - \mu [3\sigma^2 + \mu^2].$$

e nel caso della distribuzione che stiamo esaminando si ha

$$(21) \quad \int_{-\infty}^{+\infty} x^3 f(x) dx = a^3 + b^3 + m^3 + a^2(b + m) + \\ + b^2(a + m) + m^2(a + b) + abm.$$

La forma analitica particolarmente semplice della funzione $f(x)$ permette di calcolare senza difficoltà anche gli altri momenti, qualora fosse necessario.

4. - Ciò che è stato detto fin qui a proposito della funzione di distribuzione data dalla (2.14) permette di risolvere qualche problema pratico che si può presentare qualora si volessero utilizzare questi sviluppi.

A tal fine ci rifacciamo a quanto abbiamo detto nel § 1 a proposito delle indicazioni e delle informazioni che possono essere fornite da esperti. Pensiamo infatti che l'ipotesi enunciata a proposito del significato della « impossibilità » che la variabile casuale esca da un certo intervallo sia abbastanza accettabile; tuttavia non si può escludere che un esperto, interrogato a proposito delle sue presunzioni e delle sue previsioni, ritenga di impegnarsi troppo indicando un intervallo al di fuori del quale egli ritiene che i valori della variabile casuale siano « impossibili »; si potrebbe quindi temere che l'esperto, nel timore di essere smentito (sia pure da fatti « straordinari » che farebbero saltare lo schema razionale che si vuole utilizzare), tenda ad ampliare l'intervallo indicato.

In tal modo, anche rimanendo fermo il valore modale, le indicazioni e le informazioni rischierebbero una distorsione, ed il procedi-

mento della costruzione della funzione triangolare di distribuzione potrebbe andare incontro ad ulteriori critiche.

Per ovviare a questo inconveniente si potrebbe pensare di richiedere all'esperto non la indicazione dell'intervallo \mathcal{E} che abbiamo finora preso in considerazione, ma di un altro intervallo, ovviamente incluso nel precedente, nel quale egli ritiene che cada una certa percentuale dei valori della variabile casuale, fermo restando — beninteso — il valore m della moda.

Qualora si voglia affrontare il problema in questi termini, si fissa un numero k positivo e non maggiore di 1, tale cioè che siano soddisfatte le relazioni

$$(1) \quad 0 < k \leq 1,$$

e si trae dalle indicazioni dell'esperto la coppia di valori a' , b' che soddisfano ovviamente alle relazioni

$$(2) \quad 0 \leq a \leq a' < m < b' \leq b$$

e sono tali che si abbia

$$(3) \quad \int_{a'}^{b'} f(x) dx = k.$$

Per uniformità di notazioni, indichiamo in questo caso con \mathcal{E}' l'insieme dei valori della variabile che costituiscono l'intervallo avente come estremi i valori a' e b' ; poniamo cioè

$$(4) \quad \mathcal{E}' = \{x \mid a' \leq x \leq b'\}.$$

Le relazioni (2) danno ovviamente la relazione tra gli insiemi \mathcal{E} e \mathcal{E}' che è espressa dalla seguente formula

$$(5) \quad \mathcal{E}' \subseteq \mathcal{E}.$$

Rimane poi da risolvere il problema di costruire una funzione $f(x)$ di distribuzione di probabilità, che abbia come moda m , che sia triangolare, e che infine soddisfi alla (3). In altre parole il problema si riconduce a quello di determinare gli estremi a e b dell'intervallo \mathcal{E} quando siano assegnati gli estremi a' e b' dell'intervallo \mathcal{E}' e sia assegnata la condizione espressa dalla (3).

Si verifica immediatamente che, anche in questo caso, il problema è indeterminato e pertanto per giungere alla sua soluzione è necessario enunciare ulteriori ipotesi. Presenteremo ora due tipi di ipotesi (tra

le tante che si potrebbero formulare) che potrebbero essere considerate da un certo punto di vista come le più semplici; per intenderci le indicheremo come « ipotesi A » ed « ipotesi B ».

IPOTESI A) - La funzione $f(x)$ negli estremi dell'intervallo \mathcal{E}' assume valori uguali; si ha cioè

$$(6) \quad f(a') = f(b').$$

IPOTESI B) - Le « code » della distribuzione di probabilità hanno valori tra loro uguali; si ha cioè

$$(7) \quad \int_a^{a'} f(x) dx = \int_{b'}^b f(x) dx.$$

Si verifica immediatamente che le due ipotesi sono compatibili (e sono anzi l'una conseguenza dell'altra) nel solo caso in cui la distribuzione sia simmetrica e cioè la media coincida con la moda.

In ogni altro caso esse sono incompatibili; la scelta di una tra esse può essere fatta con riferimento al singolo problema che viene trattato ed al tipo di informazioni e di indicazioni che vengono richieste.

Svilupperemo in questo paragrafo i calcoli relativi alle conseguenze più immediate della ipotesi A), rimandando al prossimo paragrafo di sviluppi analoghi relativi alla ipotesi B).

Nel caso della ipotesi A) è chiaro che i due valori a' e b' che soddisfano alla (6) danno luogo sul diagramma della funzione $f(x)$ a due punti che sono congiunti tra loro da una retta parallela all'asse delle ascisse. Indichiamo per comodità con ε la ordinata comune a questi due punti; poniamo cioè

$$(8) \quad \varepsilon = f(a') = f(b').$$

In forza del significato geometrico dell'area del triangolo si ha chiaramente

$$(9) \quad 0 \leq \varepsilon \leq 2/(b - a).$$

Le relazioni che legano i valori a' e b' agli estremi a e b dell'intervallo \mathcal{E} si determinano con calcoli molto semplici, che sono immediate conseguenza delle (2.6) e (2.10).

Si ottiene

$$(10) \quad \begin{cases} a' = a + \varepsilon(b - a)(m - a)/2 \\ b' = b + \varepsilon(b - a)(m - b)/2 \end{cases}$$

Il calcolo dell'integrale che figura nella (3) porta al seguente risultato

$$(11) \quad k = 1 - \varepsilon^2(b - a)^2/4$$

e di qui si trae

$$(12) \quad \varepsilon = 2\sqrt{1 - k}/(b - a).$$

Pertanto, quando siano dati i valori a' e b' , gli estremi a e b dell'intervallo \mathcal{E} sono dati dalle seguenti espressioni

$$(13) \quad \left\{ \begin{array}{l} a = \frac{a' - m\sqrt{1 - k}}{1 - \sqrt{1 - k}} \\ b = \frac{b' - m\sqrt{1 - k}}{1 - \sqrt{1 - k}} \end{array} \right.$$

Può essere interessante in questo caso il calcolo del valore della « code » della distribuzione, anche ai fini del confronto delle conseguenze della scelta dell'una oppure dall'altra delle due ipotesi.

Anche in questo caso, poichè si tratta di calcoli del tutto elementari, presentiamo soltanto i risultati: si ha

$$(14) \quad \left\{ \begin{array}{l} \int_a^{a'} f(x) dx = (m - a)(1 - k)/(b - a) \\ \int_{b'}^b f(x) dx = (b - m)(1 - k)/(b - a). \end{array} \right.$$

I risultati espressi dalle formule (14) potrebbero essere esposti in parole dicendo che, nel caso della Ipotesi A) le « code » della distribuzione si ripartiscono il « residuo » $(1 - k)$ in parti proporzionali alle lunghezza degli intervalli parziali (che abbiamo convenuto di indicare con \mathcal{U} e \mathcal{V}) ai quali appartengono.

5. - Prenderemo ora in considerazione quella che abbiamo chiamata la Ipotesi B) ed imposteremo il problema di determinare gli estremi dell'intervallo \mathcal{E} , quando siano state ricevute informazioni sufficienti per garantire che sono soddisfatte le relazioni (4.1), (4.2), (4.3), (4.7).

In particolare, come conseguenza della (4.3) si ha che la (4.7) può essere ulteriormente precisata: si hanno infatti ovviamente le due relazioni seguenti

$$(2) \quad \int_a^{a'} f(x) dx = \int_{b'}^b f(x) dx = (1-k)/2.$$

Ricordando le (2.6) e (2.10) si ha, in modo del tutto elementare:

$$(2) \quad \left\{ \begin{array}{l} (a' - a)^2 / (b - a)(m - a) = \int_a^{a'} f(x) dx \\ (b - b')^2 / (b - a)(b - m) = \int_{b'}^b f(x) dx. \end{array} \right.$$

Come conseguenza delle (1) e (2) la determinazione di a e b , quando siano noti i valori di a' , b' , m e k si riconduce alla risoluzione del sistema di due equazioni algebriche

$$(3) \quad \left\{ \begin{array}{l} 2(a' - a)^2 = (1 - k)(b - a)(m - a) \\ 2(b - b')^2 = (1 - k)(b - a)(b - m). \end{array} \right.$$

In questo sistema i dati sono ovviamente a' , b' , m , k e le incognite sono a e b . Il sistema algebrico dato dalle equazioni (3) risulta essere di 4° grado e pertanto potrebbe essere risolto con i metodi algebrici classici. Tuttavia, date le particolari condizioni alle quali debbono soddisfare le soluzioni, riteniamo più conveniente indicare un procedimento numerico (tra i tanti possibili) atto alla approssimazione delle radici che interessano, quelle cioè che soddisfano alle condizioni (4.2), essendo la costante k tale da soddisfare alla (4.1).

Per comodità poniamo

$$(4) \quad a' - a = u; \quad b - b' = v;$$

e di qui deduciamo:

$$(5) \quad a = a' - u; \quad b = b' + v.$$

Sostituendo nelle (3) i valori di a e b che sono dati dalle (5) si ottiene facilmente il sistema delle (3) scritto nella forma seguente:

$$(6) \quad \left\{ \begin{array}{l} u^2 = \frac{1-k}{2} [b' - a' + u + v] [m - a' + u] \\ v^2 = \frac{1-k}{2} [b' - a' + u + v] [b' - m + v]. \end{array} \right.$$

Come conseguenza delle condizioni (4.2) si ha che il problema che ci interessa è quello di ricercare la soluzione delle (6) per la quale valgono le condizioni:

$$(7) \quad u \geq 0; \quad v > 0.$$

Per giungere alla soluzione del sistema (6) è conveniente scriverlo nella forma seguente:

$$(8) \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{1+k}{1-k} u^2 - u \{ b' - 2a' + m + v \} - (m - a')(b' - a' + v) = 0 \\ \frac{1+k}{1-k} v^2 - v \{ 2b' - a' + m + u \} - (b' - m)(b' - a' + u) = 0 \end{array} \right.$$

Si constata senza difficoltà la esistenza di una soluzione del sistema (8) che soddisfi alle condizioni (7); a tal fine si può considerare la coppia di valori u, v come una coppia di coordinate cartesiane di un punto in un piano ausiliario π . Con questa convenzione, le (8) vengono a rappresentare due iperboli nel piano ausiliario considerato; la esistenza di un punto che appartenga al primo quadrante di questo piano e che sia intersezione delle due iperboli (8) può essere assicurata quando si eseguisca l'analisi dell'andamento dei rami delle iperboli nominate, ed in particolare quando si osservi che la prima delle due iperboli (8) ha un asintoto che è parallelo alla retta rappresentata dalla equazione

$$v = \frac{1+k}{1-k} u,$$

e la seconda delle due iperboli ha un asintoto che è parallelo alla retta rappresentata dalla equazione

$$u = \frac{1+k}{1-k} v.$$

In base alle condizioni (7) si ha che è possibile risolvere le equazioni (8), rispettivamente nelle incognite u e v , scegliendo il segno positivo per il radicale.

Poniamo

$$\left. \begin{aligned} u = p(v) &= \frac{1-k}{2(1+k)} \left\{ b' - 2a' + m + v + \right. \\ &\quad \left. + \sqrt{(b' - 2a' + m + v)^2 + 4 \frac{1+k}{1-k} (m - a')(b' - a' + v)} \right\} \\ v = q(u) &= \frac{1-k}{2(1+k)} \left\{ 2b' - a' + m + u + \right. \\ &\quad \left. + \sqrt{(2b' - a' - m + u)^2 + 4 \frac{1+k}{1-k} (b' - m)(b' - a' + u)} \right\}. \end{aligned} \right\}$$

Nel piano ausiliario π , l'andamento delle due funzioni $q(u)$ e $p(v)$, nella parte che ci interessa, è illustrato qualitativamente dal diagramma accluso (Fig. 5):

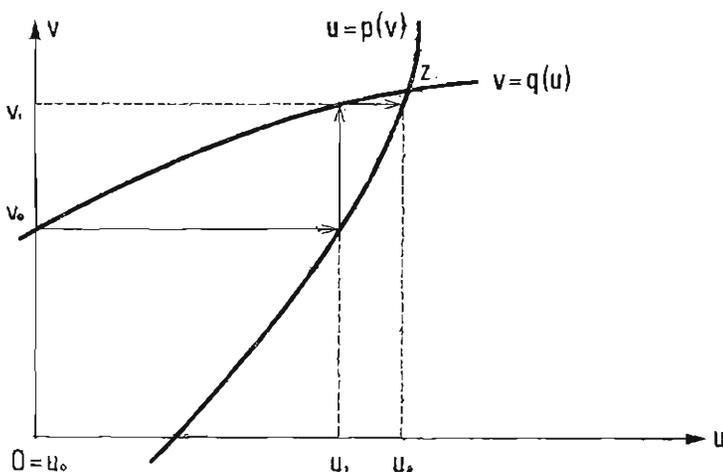


Fig. 5.

e pertanto la ricerca del punto Z , le cui coordinate danno la soluzione del sistema (8) che qui ci interessa, può essere fatta mediante la successione seguente:

$$(10) \quad \left\{ \begin{array}{ll} u_0 = 0 & v_0 = q(u_0) \\ u_1 = p(v_0) & v_1 = q(u_1) \\ u_2 = p(v_1) & v_2 = q(u_2) \\ \dots & \dots \\ u_n = p(v_{n-1}) & v_n = q(u_n) \\ \dots & \dots \end{array} \right.$$

Ovviamente una successione diversa dalla precedente, ma pure convergente alle coordinate del punto Z che si cerca, può essere ottenuta ponendo $v_0 = 0$ e proseguendo in modo analogo.

Non ci dilunghiamo sulla discussione della convergenza della successione (10), discussione che può essere facilitata dalla analisi del grafico illustrato nella Fig. 5.

6. - Dedicheremo il seguito di questo lavoro allo studio delle funzioni di n variabili casuali

$$(1) \quad x_1, x_2, \dots, x_n$$

ciascuna delle quali abbia una funzione di distribuzione triangolare e che soddisfino alla ipotesi fondamentale di essere indipendenti.

Per comodità introdurremo le seguenti convenzioni e notazioni: indicheremo con N l'insieme dei primi n numeri interi naturali; porremo cioè

$$(2) \quad N = \{1, 2, \dots, n\};$$

indicheremo con ξ un punto dello spazio \mathbf{R}^n ad n dimensioni e converremo di dire che gli n numeri reali (1) sono le « coordinate » di ξ .

Supporremo che esistano $3n$ numeri reali, che indicheremo con a_i, m_i, b_i ($i \in N$), tali che siano soddisfatte le relazioni

$$(3) \quad 0 \leq a_i < m_i < b_i \quad (i \in N);$$

indicheremo anche qui con \mathcal{U}_i l'intervallo dei valori della variabile x_i avente come estremi a_i ed m_i ; porremo cioè

$$(4) \quad \mathcal{U}_i = \{x_i \mid a \leq x_i \leq m_i\} \quad (i \in N);$$

indicheremo con \mathcal{V}_i l'intervallo dei valori della variabile x_i avente come estremi m_i ed b_i ; porremo cioè

$$(5) \quad \mathcal{V}_i = \{x_i \mid m_i \leq x_i \leq b_i\} \quad (i \in N);$$

indicheremo poi con \mathcal{E}_i l'intervallo dei valori della variabile x_i che è unione degli insiemi \mathcal{U}_i e \mathcal{V}_i ; porremo cioè

$$(6) \quad \mathcal{E}_i = \mathcal{U}_i \cup \mathcal{V}_i;$$

si avrà quindi

$$(7) \quad \mathcal{E}_i = \{x_i \mid a_i \leq x_i \leq b_i\}.$$

Indicheremo con \mathcal{E} l'insieme prodotto cartesiano degli n insiemi \mathcal{E}_i ; porremo cioè

$$(8) \quad \mathcal{E} = \mathcal{E}_1 \times \mathcal{E}_2 \times \dots \times \mathcal{E}_n.$$

E' del tutto ovvio che l'insieme \mathcal{E} costituisce un iperparallelepipedo dello spazio \mathbf{R}^n , dotato di 2^n vertici; indichiamo con

$$(9) \quad c_1, c_2, \dots, c_n$$

le coordinate di uno dei vertici dell'insieme \mathcal{E} . Sia poi η una funzione avente come dominio l'insieme N e come codominio l'insieme formato dalla coppia $\{+1, -1\}$; sia cioè

$$(10) \quad \eta: N \rightarrow \{+1, -1\}.$$

Fissata che sia una funzione η , ad essa corrisponde un vertice dell'insieme \mathcal{E} , e precisamente quel vertice la cui coordinata c_i può essere espressa nella forma

$$(11) \quad c_i = \frac{1}{2} (a_i + b_i) + \frac{1}{2} \eta(i) (a_i - b_i) \quad (i \in N).$$

E' chiaro allora che, poichè il numero delle funzioni η è 2^n , tanti sono i vertici dell'insieme \mathcal{E} .

Nel seguito ci farà comodo chiamare *segnatura* di un vertice di \mathcal{E} la successione

$$(12) \quad \eta(1), \eta(2), \dots, \eta(n).$$

E' ovvio, da quanto precede, che gli elementi della successione (12) sono elementi dell'insieme $\{+1, -1\}$. Si può ora osservare che, in corrispondenza alla segnatura dei vertici dell'insieme \mathcal{E} , è possibile anche prendere in considerazione la suddivisione di \mathcal{E} stesso in 2^n sottoinsiemi, tali che \mathcal{E} è la unione di questi sottoinsiemi.

Infatti, fissata che sia la funzione η , l'insieme N viene suddiviso in due insiemi J e K disgiunti, uno dei quali può anche essere vuoto.

Precisamente possiamo convenire di indicare con J l'insieme degli elementi

$$(13) \quad j_1, j_2, \dots, j_r \in N$$

tali che in ciascuno di essi la funzione η assume il valore $+1$, e possiamo convenire di indicare con k l'insieme degli elementi

$$(14) \quad k_1, k_2, \dots, k_{n-r} \in N$$

tali che in ciascuno di essi la funzione η assume il valore -1 .

Ovviamente, indicato con r il numero degli elementi di J , si ha

$$(15) \quad 0 \leq r \leq n.$$

Di conseguenza si ha che l'insieme \mathcal{E} può essere considerato come la unione di 2^n insiemi, ognuno dei quali si ottiene come prodotto cartesiano di r insiemi \mathcal{U}_j e di $(n-r)$ insiemi \mathcal{V}_k ,

$$(16) \quad \mathcal{U}_{j_1} \times \mathcal{U}_{j_2} \times \dots \times \mathcal{U}_{j_r} \times \mathcal{V}_{k_1} \times \mathcal{V}_{k_2} \times \dots \times \mathcal{V}_{k_{(n-r)}}.$$

Come abbiamo detto, ogni sottoinsieme del tipo (16) viene ottenuto in corrispondenza ad una funzione η , la quale determina la suddivisione dell'insieme N nei due sottoinsiemi J e K di cui abbiamo detto; e questi a loro volta determinano il sottoinsieme (16).

Potremo pertanto convenire di dire che la successione (12) è la *segnatura* del sottoinsieme (16) che si ottiene in corrispondenza. È facile constatare che un sottoinsieme del tipo (16) contiene il vertice che ha segnatura uguale.

Consideriamo ora due vertici dell'insieme \mathcal{E} ; diremo che essi sono « opposti » se essi hanno segnature opposte, tali cioè che ad ogni $+1$ della segnatura dell'uno corrisponde un -1 della segnatura dell'altro e viceversa.

Pertanto, fissata che sia una funzione η , è quindi fissato in corrispondenza il vertice di \mathcal{E} che ha le coordinate date da

$$(17) \quad \bar{c}_i = \frac{1}{2} (a_i + b_i) - \frac{1}{2} \eta(i) (a_i - b_i).$$

Indichiamo con g la distanza tra due vertici opposti quali si vogliono di \mathcal{E} ; essa è chiaramente la massima distanza tra una coppia di punti appartenenti a \mathcal{E} . Tale distanza è data da

$$(18) \quad \varrho = \sqrt{\sum_{i=1}^n (b_i - a_i)^2}.$$

Consideriamo ora una funzione η e siano

$$(19) \quad c_1, c_2, \dots, c_n$$

le coordinate del vertice corrispondente alla segnatura data dalla funzione η fissata; pertanto le c_i saranno assegnate dalle espressioni (11).

Si verifica facilmente che ogni punto $\xi \in \mathcal{E}$ ha le sue coordinate che possono essere espresse nella forma seguente:

$$(20) \quad x_i = c_i + t \eta(i) \cdot \alpha(i), \quad (i \in N),$$

essendo i numeri $\alpha(i)$ tali da soddisfare alle condizioni

$$(21) \quad \left\{ \begin{array}{l} \alpha(i) \geq 0 \\ \sum_{i=1}^n [\alpha(i)]^2 = 1, \end{array} \right.$$

ed essendo il valore di t appartenente all'intervallo definito dalle relazioni

$$(22) \quad 0 \leq t \leq \varrho.$$

Usando il linguaggio geometrico, potremmo dire che le formule (20) danno la rappresentazione parametrica di ogni semiretta che ha la sua origine nel vertice di coordinate (19) e congiunge tale vertice con un altro punto appartenente all'insieme \mathcal{E} , e che le $\alpha(i)$ danno i valori assoluti dei coseni direttori di tale semiretta.

Per es. per la semiretta che congiunge il vertice con il suo opposto si ha

$$(23) \quad \alpha(i) = (b_i - a_i)/\varrho \quad (i \in N).$$

Se indichiamo con \dot{x}_i le derivate delle funzioni (20) rispetto al parametro t se poniamo cioè

$$(24) \quad \dot{x}_i = \frac{dz_i}{dt}$$

otteniamo

$$(25) \quad \dot{x}_i = \eta(i) \alpha(i).$$

Ricordando le (21) possiamo dedurre di qui la validità della seguente

OSSERVAZIONE - Se un punto $\xi \in \mathcal{E}$ si muove in funzione di un parametro t , lungo la semiretta che ha origine in un determinato vertice di \mathcal{E} stesso, le derivate delle coordinate del punto rispetto al parametro t hanno segni uguali ai corrispondenti elementi della successione (12) che dà la segnatura del vertice di partenza (origine della semiretta).

Per la utilizzazione che daremo nel seguito, possiamo anche convenire di dare ai vertici di \mathcal{E} un ordinamento, che consegue dalla convenzione di assegnare una segnatura ad ogni vertice. A tal fine consideriamo due funzioni η ed η' che danno luogo alle segnature di due vertici:

$$\begin{aligned} (12) & \quad \{ \eta(1), \eta(2), \dots, \eta(n) \\ (26) & \quad \{ \eta'(1), \eta'(2), \dots, \eta'(n); \end{aligned}$$

converremo di dire che la segnatura (12) *precede* la segnatura (26) (e quindi che il vertice di \mathcal{E} corrispondente alla prima precede il vertice corrispondente alla seconda) se, in corrispondenza del minimo indice numerico i ($i \in N$) per il quale si ha

$$\eta(i) \neq \eta'(i)$$

si ha anche

$$\eta(i) > \eta'(i)$$

ossia, data la natura delle funzioni che consideriamo,

$$\eta(i) = +1; \quad \eta'(i) = 1.$$

Di conseguenza e per le (11) si ha per es. che il vertice di \mathcal{E} per il quale si ha

$$c_i = a_i$$

precede ogni altro ed il vertice per il quale si ha

$$c_i = b_i$$

è preceduto da ogni altro.

E' facile verificare che queste convenzioni stabiliscono nell'insieme degli 2^n vertici di \mathcal{E} un ordinamento totale.

7. - Supporremo che ogni variabile casuale x_i ($i \in N$) abbia una funzione di distribuzione del tipo triangolare $f_i(x_i)$, diversa da zero nell'intervallo \mathcal{E}_i e con moda m_i .

Pertanto potremo porre:

$$\begin{aligned}\varphi_i(x_i) &= (x_i - a_i + |x_i - a_i|) / (b_i - a_i)(m_i - a_i); \\ \psi_i(x_i) &= (b_i - x_i + |b_i - x_i|) / (b_i - a_i)(b_i - m_i)\end{aligned}$$

e di conseguenza

$$f_i(x_i) = \text{Min} [\varphi_i(x_i), \psi_i(x_i)]$$

ossia

$$f_i(x_i) = \frac{1}{2} \varphi_i(x_i) [1 + \text{sgn}(m_i - x_i)] + \frac{1}{2} \psi_i(x_i) [1 + \text{sgn}(x_i - m_i)].$$

Abbiamo supposto esplicitamente che le variabili casuali x_i soddisfino alla condizione di essere indipendenti; di conseguenza potremo associare ad un punto $\xi \in \mathbf{R}^n$ una funzione $\Psi(\xi)$ di distribuzione di probabilità che è prodotto delle n funzioni $f_i(x_i)$, e cioè è data da

$$(1) \quad \Psi(\xi) = \prod_{i=1}^n f_i(x_i).$$

È ovvio che la funzione Ψ è uguale a zero quando si ha $\xi \notin \mathcal{E}$. Si dimostra poi anche facilmente che la funzione Ψ ha un unico massimo, in corrispondenza al punto di \mathcal{E} che ha coordinate

$$(2) \quad m_1, m_2, \dots, m_n.$$

Consideriamo ora una funzione

$$(3) \quad z = \Phi(\xi)$$

del punto $\xi \in \mathbf{R}^n$; in base a ciò che è stato detto in precedenza, possiamo considerare z come variabile casuale, funzione delle n variabili casuali indipendenti che abbiamo interpretato come le coordinate di ξ e che abbiamo supposto dotate di leggi di distribuzione triangolari. Per le applicazioni pratiche risulta utile analizzare le proprietà della variabile casuale z .

A questo proposito si può osservare immediatamente che la funzione di distribuzione della variabile z dipende in modo essenziale dalla natura della funzione Φ ; risulta quindi difficile dare, in generale, una espressione analitica di tale funzione di distribuzione. L'analisi di al-

cuni esempi, anche semplici, dimostra inoltre che tale espressione analitica può essere notevolmente complicata e di scarso interesse per le applicazioni. Pertanto ci dovremo limitare qui alla determinazione di quelle proprietà della funzione z che sono di più semplice espressione e che si prestano ad essere utilizzate per impostare la ricerca della funzione di distribuzione e dei suoi caratteri per mezzo di procedimenti di simulazione.

In questo ordine di idee il problema che si presenta come il più importante è quello della determinazione dell'intervallo dei valori di z a cui corrispondono valori di probabilità diversi da zero. Tale problema sarà da noi avviato a soluzione in corrispondenza ad ipotesi sulle funzione Φ che possono apparire abbastanza restrittive, ma che sono molto spesso soddisfatte nella pratica delle funzioni che occorre utilizzare.

Precisamente supporremo che siano valide le seguenti ipotesi:

IPOTESI I. - Esiste almeno un insieme \mathcal{D} , aperto in \mathbf{R}^n e contenente \mathcal{E} , e tale che in ogni punto $\xi \in \mathcal{D}$ la funzione Φ abbia derivate parziali prime continue.

Osserviamo che questa ipotesi è certamente soddisfatta quando Φ sia una funzione razionale delle variabili

$$(4) \quad x_1, x_2, \dots, x_n;$$

precisamente se la funzione è razionale intera la ipotesi è soddisfatta ovunque, se la funzione è razionale fratta la ipotesi è certo soddisfatta in punti che non rendano uguale a zero il denominatore. Anche per molte funzioni non elementari, che si presentano spesso nella pratica la ipotesi è soddisfatta.

In base alla ipotesi enunciata ora è possibile prendere in considerazione, nei punti dell'insieme \mathcal{D} , il vettore

$$(5) \quad \text{grad } \Phi$$

le cui componenti sono date, come è noto, dalle derivate parziali prime della funzione Φ rispetto alle variabili (4); tali componenti sono quindi date rispettivamente da

$$(6) \quad \frac{\partial \Phi}{\partial x_1}, \frac{\partial \Phi}{\partial x_2}, \dots, \frac{\partial \Phi}{\partial x_n}.$$

Possiamo ora enunciare la

IPOTESI II - Ogni componente del vettore (5), mantiene lo stesso segno in ogni punto $\xi \in \mathcal{D}$.

Questa ipotesi può essere espressa nella forma:

$$(7) \quad \xi \in \mathcal{D} \rightarrow \prod_{i=1}^n \left(\frac{\partial \Phi}{\partial x_i} \right) \neq 0.$$

Come conseguenza delle ipotesi enunciate possiamo osservare che alla funzione Φ corrisponde una segnatura, data da

$$(8) \quad \operatorname{sgn} \left(\frac{\partial \Phi}{\partial x_1} \right), \operatorname{sgn} \left(\frac{\partial \Phi}{\partial x_2} \right), \dots, \operatorname{sgn} \left(\frac{\partial \Phi}{\partial x_n} \right)$$

e pertanto corrisponde anche un vertice dell'insieme \mathcal{E} , vertice dato dalla segnatura (8).

Si giunge ora facilmente alla seguente

OSSERVAZIONE. Se la funzione Φ soddisfa alle ipotesi enunciate, il valore minimo della funzione stessa, per $\xi \in \mathcal{E}$ è assunto nel vertice che ha la segnatura (8), corrispondente al vettore $\operatorname{grad} \Phi$, ed il valore massimo è assunto nel vertice opposto (avente quindi segnatura opposta).

Per constatare la validità della osservazione basta esprimere le coordinate del punto $\xi \in \mathcal{E}$ in funzione di un parametro t , mediante le (6.20), tenendo presenti le (6.21) e (6.22). Di conseguenza si avrà anche che la funzione z , data dalla (3), risulterà essere funzione della variabile t . La sua derivata rispetto a t è data, come è noto, dalla formula

$$(9) \quad \frac{dz}{dt} = \sum_{i=1}^n \frac{\partial \Phi}{\partial x_i} \cdot \dot{x}_i.$$

Pertanto, se la origine della semiretta sulla quale varia il punto è determinata in base alla segnatura (8), tale derivata risulta essere positiva, quale che sia la scelta delle costanti $\alpha(i)$, purchè beninteso soddisfacenti alle citate (6.21). Di conseguenza si ha che la funzione (3) ha in ogni punto $\xi \in \mathcal{E}$ valori maggiori di quello che assume nel vertice citato.

In modo perfettamente analogo si constata che la funzione stessa acquista il suo valore massimo nel vertice opposto di quello ricordato.

La osservazione precedente permette di determinare con relativa facilità l'intervallo dei valori della variabile casuale z ai quali corrisponde probabilità diversa da zero: infatti, ricordando che in base alle ipotesi fatte sulle variabili casuali x_i , la funzione (1) è uguale a zero

fuori di \mathcal{E} , si ha immediatamente che l'intervallo cercato risulta essere dato dai valori di z che corrispondono al minimo ed al massimo della funzione (3) quando si abbia $\xi \in \mathcal{E}$; pertanto tale minimo e massimo sono assunti nei vertici di \mathcal{E} che sono dati dalla segnatura (8), e dalla sua opposta.

8. - La osservazione con la quale abbiamo chiuso il § precedente permette di determinare esattamente l'intervallo dei valori della funzione $\Phi(\xi)$ ivi considerata in cui la probabilità è diversa da zero, in molti casi che si presentano nella pratica. Rientrano per es. nelle ipotesi considerate le funzioni del tipo

$$(1) \quad \Phi(\xi) = \sum_{i=1}^n \gamma_i x_i$$

(essendo le γ_i delle costanti) e le funzioni del tipo

$$(2) \quad \Phi(\xi) = \sum_{i=1}^m x_i x_i + m$$

quando siano soddisfatte le ipotesi [più restrittive di quelle date in (6.3)]

$$(3) \quad a_i > 0.$$

Si può tuttavia osservare che, sulla base dei risultati del § precedente, è possibile avviare a soluzione pratica anche un certo numero di altri problemi, per i quali non sia possibile determinare correttamente in teoria la forma analitica della funzione di distribuzione della funzione z .

I casi più interessanti ai quali vogliamo limitare le nostre considerazioni sono quelli nei quali non è possibile accertare direttamente che la funzione Φ soddisfa alle ipotesi enunciate nel § 7, ma essa risulta differenza oppure rapporto di due funzioni che soddisfino alle ipotesi stesse.

In questi casi è possibile facilmente determinare un intervallo di valori della funzione z fuori del quale certamente la probabilità è uguale a zero, pur senza poter garantire che tale intervallo sia il minimo possibile. Per dare una idea del procedimento che si può seguire, preferiamo trattare esplicitamente alcuni esempi.

Sia

$$(4) \quad n = 3m$$

e consideriamo le due funzioni

$$(5) \quad \left\{ \begin{array}{l} \Omega(\xi) = \sum_{j=1}^m x_j x_{j+m} \\ \Omega'(\xi) = \sum_{j=1}^m x_j x_{j+2m} \end{array} \right.$$

dove ciascuna delle variabili x_i ($i = 1, 2, \dots, 3m$) ha una distribuzione triangolare, essendo soddisfatte inoltre le ipotesi (3).

E' anzitutto evidente che la funzione $\Omega(\xi)$ presenta probabilità diversa da zero nel campo I dato da

$$\mathcal{E}_1 \times \mathcal{E}_2 \times \dots \times \mathcal{E}_m \times \mathcal{E}_{m+1} \times \mathcal{E}_{m+2} \dots \times \mathcal{E}_{2m}$$

ed analogamente la funzione $\Omega'(\xi)$ presenta probabilità diversa da zero nel campo I' dato da

$$\mathcal{E}_1 \times \mathcal{E}_2 \times \dots \times \mathcal{E}_m \times \mathcal{E}_{2m+1} \times \mathcal{E}_{2m+2} \times \dots \times \mathcal{E}_{3m}.$$

Nel campo I è possibile applicare la osservazione del § precedente ed assicurare che la funzione $\Omega(\xi)$ soddisfa a certe relazioni:

$$0 < A \leq \Omega \leq B.$$

Analogamente nel campo I' è possibile applicare le considerazioni svolte nel § precedente e pertanto assicurare che la funzione $\Omega'(\xi)$ soddisfa certe relazioni:

$$0 < A' \leq \Omega' \leq B'.$$

Risulta allora immediato osservare che nel campo \mathcal{C} definito da

$$\mathcal{C} = \mathcal{E}_1 \times \dots \times \mathcal{E}_m \times \mathcal{E}_{m+1} \times \dots \times \mathcal{E}_{2m} \times \mathcal{E}_{2m+1} \times \dots \times \mathcal{E}_{3m}$$

la funzione

$$(7) \quad \Phi(\xi) = \Omega - \Omega'$$

ha certamente probabilità uguale a zero in corrispondenza ai valori esterni all'intervallo

$$(8) \quad A - B' < \Phi < A' - B$$

e nel campo stesso la funzione

$$(9) \quad \Phi(\xi) = \Omega' / \Omega$$

ha probabilità certamente uguale a zero in corrispondenza ai valori esterni all'intervallo

$$(10) \quad A' / B < \Phi < B' / A .$$

Le limitazioni (8) e (10) possono essere considerate come abbastanza grossolane, e certamente in molti casi particolari è possibile trovare degli intervalli più ristretti che siano atti allo scopo. Tuttavia si può osservare che le limitazioni date possono essere sufficienti per avviare a soluzione il problema di stimare mediante simulazione la funzione di distribuzione della variabile casuale z . Lasciando i particolari all'appendice di questo articolo, dedicata ai problemi del calcolo numerico relativi alla trattazione che abbiamo data, vogliamo soffermarci brevemente sul possibile significato economico delle funzioni date dalla (7) e dalla (9). Tale significato economico potrebbe essere dato in base alle seguenti considerazioni: considerati certi prodotti, le cui quantità saranno indicate con

$$(11) \quad x_1, x_2, \dots, x_m$$

possiamo pensare di indicare con

$$(12) \quad x_{m+1}, x_{m+2}, \dots, x_{2m}$$

i prezzi di vendita dei prodotti stessi e con

$$(13) \quad x_{2m+1}, x_{2m+2}, \dots, x_{3m}$$

i costi unitari di produzione.

Supponiamo di aver ottenuto delle stime degli intervalli di variazione delle variabili (11), (12), (13) con le procedure indicate nei §§ 1 e 4. Allora le funzioni Φ date rispettivamente dalle (7) e (9) forniscono rispettivamente il profitto netto e la percentuale dei costi sul venduto. Nei limiti entro i quali si pensa lecito considerare valide le ipotesi che abbiamo enunciate (ed in particolare che le variabili siano indipendenti) è allora possibile applicare a questo caso l'analisi che abbiamo svolta e i procedimenti di calcolo che saranno sviluppati.

- 348 — L. Paganoni — Sulla equivalenza di due famiglie di insiemi di fronte alla equidistribuzione. *Rend. Ist. Lomb.* (1968).
- 349 — E. Barazzefi — Sulla rappresentazione dei due campi gravitazionale ed elettromagnetico nella teoria unitaria einsteiniana. *Rend. Ist. Lomb.* (1968).
- 350 — P. Udeschini — Hamiltonian formalism in Einsteinian gravitation: geometrical aspect. *Meccanica* (1968).
- 351 — P. Udeschini — Sulla forma hamiltoniana della teoria einsteiniana della gravitazione. *Rend. Sem. Matem. e Fis. Milano* (1968).
- 352 — C. F. Manara — Il modello di Piero Sraffa per la produzione congiunta di merci a mezzo di merci. *L'industria* (1968).
- 353 — C. Marchionna Tibiletti — Operatori idempotenti nel reticolo dei sottogruppi di un gruppo. *Ist. Naz. Alta Matem. Symposia Mathematica* (1968).
- 354 — M. Cugiani - A. Liverani - G. Regoliosi — Processi di simmetrizzazione nelle applicazioni Monte Carlo al problema di Dirichlet. *Atti Sem. Matem. e Fis. Univ. di Modena* (1968).
- 355 — P. C. Nicola — Equilibrio economico generale di tipo concorrenziale in condizioni dinamiche. *L'industria*. (1969).
- 356 — D. Roux — Sulle funzioni intere rappresentate da serie di Dirichlet lacunari. *Riv. Mat. Univ. Parma* (1967).
- 357 — V. Zambelli — I q-reticoli e le chiusure di operatori di tipo centrale su un reticolo completo. *Atti Accademia Scienze Torino* (1968-69).
- 358 — F. Skof — Criteri sufficienti di completa additività per le funzioni aritmetiche. *Ed. Tamburini, Milano* (1969).
- 359 — F. Skof — Intorno ad una congettura di P. Erdős sulle funzioni aritmetiche additive. *Ed. Tamburini, Milano* (1969).
- 360 — M. Dedò — Matematica e teorie formali. *Period. di Matem.* (1969).
- 361 — P. Canetta — Questioni di matematica elementare risolte da numeri interi, razionali o irrazionali. *Period. di Matem.* (1969).
- 362 — P. Nicola — L'autofinanziamento come possibile fattore di fluttuazioni cicliche. *Riv. Intern. Scienze Sociali* (1969).
- 363 — P. Nicola — Economia di benessere e ottimalità intertemporale. *Riv. Intern. Scienze Sociali* (1969).
- 364 — M. D'Aprile — Invarianti proiettivi di terne di bandiere. *Rend. Ist. Lomb.* (1969).
- 365 — M. C. Tamburini — Estensioni di operatori di chiusura. *Rend. Ist. Lomb.* (1969).
- 366 — C. Bonzini — Sulla somma di reticoli. *Rend. Ist. Lomb.* (1969).
- 367 — F. Skof — Fluttuazione lenta e punti singolari delle serie di potenze. *Rend. Ist. Lomb.* (1969).
- 368 — F. Skof — Sulle funzioni $f(n)$ aritmetiche additive asintotiche a $c \log n$. *Rend. Ist. Lomb.* (1969).
- 369 — L. Paganoni — Sulla costruzione di una misura coerente con quelle di due δ -anelli. *Rend. Ist. Lomb.* (1969).
- 370 — L. Paganoni — Sulla misura dedotta da due δ -anelli ciascuno provvisto di un sistema generatore disgiunto. *Rend. Ist. Lomb.* (1969).
- 371 — L. Paganoni — Una osservazione sugli insiemi di Baire chiusi in uno spazio di Hausdorff localmente compatto. *Rend. Ist. Lomb.* (1969).
- 372 — G. Melzi — Fasci di fibre, fasci multipli e problemi di geometria differenziale in grande. *Rend. Sem. Matem. e Fis. di Milano*. (1969).
- 373 — L. Levi — Spunti per una trattazione assiomatica di alcuni capitoli della matematica. *Period. di Matem.* (1969).

COLLECTANEA MATHEMATICA

Pubblicazioni dell'Istituto di Matematica dell'Università di Milano

- 322 — C. F. Manara — Sull'impiego del metodo matematico in Economia. *Riv. Intern. Sc. Sociali.* (1967).
- 325 — E. Bombieri — Sulla seconda variazione della funzione di Koebe. *Boll. U.M.I.* (1967).
- 324 — E. Udeschini Brinis — Variational deduction of spinor field equations. *Meccanica.* (1967).
- 325 — M. Pastori — Apparent forces of analytical mechanics. *Meccanica.* (1967).
- 326 — M. Pastori — Su alcune forze a potenza nulla della Meccanica analitica. *Rend. Acc. Naz. Lincei* (1967).
- 327 — M. De Socio — Considerazioni sull'influenza di uno strato di gas ionizzato non lineare nella propagazione di un campo elettromagnetico piano. *Rend. Acc. Naz. Lincei* (1967).
- 328 — V. Zambelli — Operatori di tipo centrale su un reticolo completo. *Rend. Ist. Lomb.* (1967).
- 329 — M. Galluzzi — Il tema di matematica al concorso per i licei. *Period. di Matem.* (1967).
D. Arbizzani — Il tema assegnato alla prova scritta del concorso A VII. *Period. di Matem.* (1967).
R. Beffi — Il tema della prova scritta del concorso A VI. *Period. di Matem.* (1967).
- 330 — M. Cugiani — Metodi Monte Carlo e sequenze di numeri a caso. *Period. di Matem.* (1967).
- 331 — G. Melzi — Il teorema di Brouwer nella moderna geometria del continuo. *Period. di Matem.* (1967).
- 332 — C. F. Manara — La simmetria. *Period. di Matem.* (1967).
- 333 — M. Dedò — Rudimenti di logica. *Period. di Matem.* (1967).
- 334 — C. F. Manara — Oscar Chisini. *Rend. Sem. Matem. e Fis. di Milano* (1967).
- 335 — M. Spoglianti — Sulla scoperta delle frazioni continue. *Atti Acc. Scienze Torino* (1967-68).
- 336 — M. Dedò — Trattazione geometrica di un problema di Hadamard. *Period. di Matem.* (1968).
- 337 — C. F. Manara — Sulla introduzione di una funzione indice di utilità. *Period. di Matem.* (1968).
- 338 — C. Marchionna Tibiletti — Operatori $\{K\}$ - semplici normali su un reticolo completo e questioni d'immersione. *Period. di Matem.* (1968).
- 339 — G. Melzi — Su una formula integrale riguardante le varietà differenziabili immerse. *Period. di Matem.* (1968).
- 340 — M. Pastori — Tensori spontanei in Meccanica e in Elettrologia. *Period. di Matem.* (1968).
- 341 — D. Roux — Sul tipo delle funzioni intere. *Period. di Matem.* (1968).
- 342 — P. Udeschini — Aspetto geometrico dell'impostazione hamiltoniana della teoria della gravitazione. *Period. di Matem.* (1968).
- 343 — M. D'Aprile — La prova scritta agli esami di abilitazione CL. XIII. *Period. di Matem.* (1967).
M. Dedò — Il tema del concorso Tab. A VI. *Period. di Matem.* (1968).
M. Galuzzi — Il tema del concorso Tab. A VII. *Period. di Matem.* (1968).
- 344 — M. Dedò — Trigonometria sferica ed iperbolica. *Period. di Matem.* (1968).
- 345 — G. Melzi — I nodi nello spazio a tre e a quattro dimensioni. *Period. di Matem.* (1968).
- 346 — G. Ricci — Funzioni aritmetiche additive e condizioni unilaterali. *Period. di Matem.* (1968).
- 347 — M. P. Manara — Sulla caratterizzazione dei reticoli di operatori di chiusura su un reticolo completo. *Rend. Ist. Lomb.* (1968).

(segue a pag. 3 della copertina)